Неблагоприятный отбор

1.4. ПРИМЕР РЕШЕНИЯ ТИПОВОЙ ЗАДАЧИ

Дано:

Нейтральный к риску монополист производит товар с постоянными предельными издержками $c = \frac{1}{4}$ и реализует его потребителю по цене $P = P(Q)$, где Q — количество товара. Функция полезности потребителя имеет вид $U = \theta \cdot V(Q) - P$, где $V(Q) = \ln(Q+1)$. Значение параметра θ — частная информация потребителя. Однако продавцу известно, что θ может с равной вероятностью принимать значения 2 и 3, т.е. потребитель может ценить данный товар низко (тип 1) или высоко (тип 2).

Задание:

1) Определите вид контрактов $\{P, Q\}$, предлагаемых монополией потребителям разных типов в случае симметричной информации.

2) Покажите, что найденные в предыдущем пункте контракты не являются оптимальными в случае асимметрии информации. В чем проявляется проблема неблагоприятного отбора в данном взаимодействии? Покажите, каким образом монополист может решить эту проблему, используя механизм фильтрации.

3) Определите, какие контракты предложит монополия потребителям разных типов в случае асимметричной информации с целью борьбы с неблагоприятным отбором. Для этого, прежде всего, определите условия участия и условия совместимости по стимулам для потребителей обоих типов и покажите (графически и аналитически), какие из этих условий эффективны в точке оптимального контракта.

Решение:

1) Проанализируем данное экономическое взаимодействие с помощью дерева игры (рис. 1.6).

Монополист предлагает потребителю контракты вида $\{P_i, Q_i\}$, где $i = 1, 2$, т.е. Q_i единиц товара за определенную сумму P_i.

Каждый потребитель максимизирует функцию полезности вида

$U_i = \theta_i \cdot \ln(1+Q_i) - P_i$, где $i = 1, 2$.

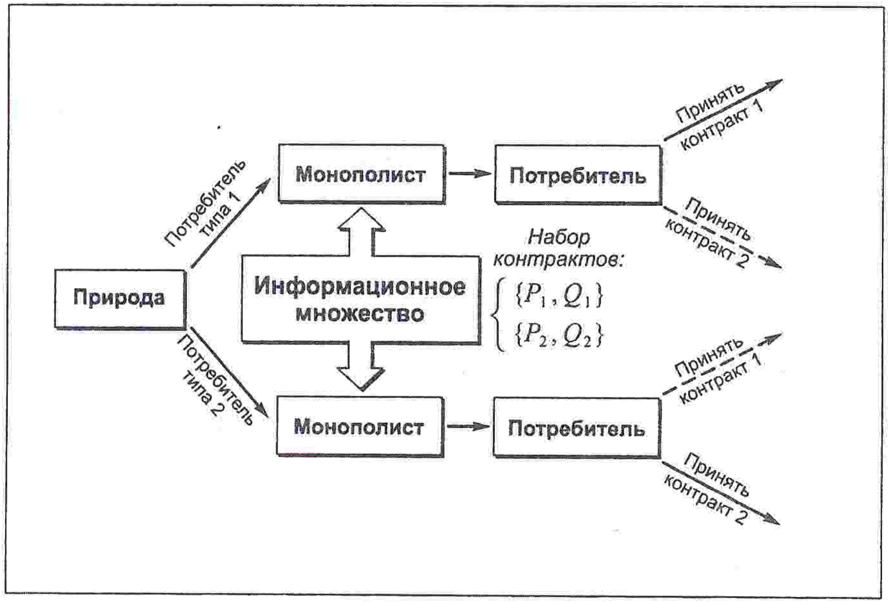

Рис. 1.6. Дерево игры

Исследуем свойства этой функции. Записав полный дифференциал $dU_i = \frac{\theta_i}{1+Q_i} dQ_i - dP_i = 0$, получим

$$\frac{dP_i}{dQ_i} = \frac{\theta_i}{1+Q_i} > 0 \quad \text{и} \quad \frac{d^2P_i}{dQ_i^2} = -\frac{\theta_i}{(1+Q_i)^2} < 0.$$

Следовательно, кривые безразличия имеют вид, представленный на рис. 1.7.

Поскольку параметр θ определяет ценность товара для потребителя (причем, согласно условию, $\frac{\partial U_i}{\partial \theta_i} > 0$), то очевидно, что с ростом параметра θ наклон кривой безразличия потребителя растет: чем ценнее товар для потребителя, тем больше он готов заплатить за дополнительную единицу товара.

Кривые безразличия, соответствующие нулевому уровню полезности $U(P, Q) = 0$, проходят через точку $(0, 0)$. Действительно, при покупке 0 единиц товара по цене 0 полезность потребителя типа i составит

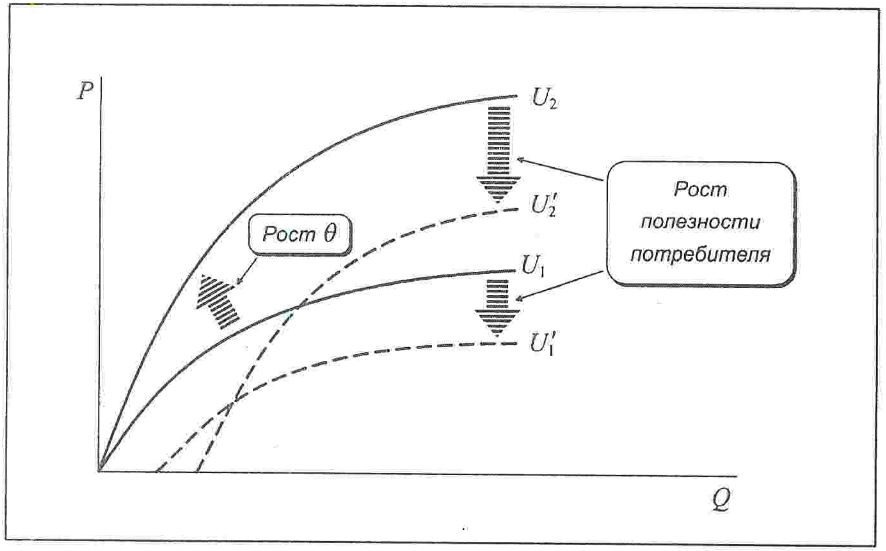

Рис. 1.7. Кривые безразличия потребителя

$$U_i(0,0) = \theta_i \cdot \ln(0+1) - 0 = \theta_i \cdot 0 - 0 = 0.$$

В то же время кривые безразличия, отражающие большее значение полезности, лежат ниже кривой безразличия, соответствующей нулевому уровню полезности, поскольку они соответствуют покупке потребителем того же количества товара за меньшую цену.

Найдем оптимальный набор контрактов, предлагаемый потребителям монополией в случае совершенной информации. Потребитель не может скрыть от продавца-монополиста свои предпочтения и приобрести товар по контракту, который предназначен для другого типа потребителей, однако он может отказаться от сделки, если сочтет предложение продавца невыгодным. Чтобы потребитель предпочел один из контрактов отказу от сделки, полезность, получаемая им от покупки, должна превышать полезность отказа от сделки, т.е. некий резервационный (альтернативный) уровень полезности $\overline{U}$.

Определим уровень альтернативной полезности. Отказ потребителя от сделки равносилен покупке 0 единиц товара по цене 0, т.е. $\overline{U} = U_i(0,0) = 0$. Итак, альтернативная полезность потребителя равна 0.

Запишем *ограничения участия* (индивидуальной рациональности), т.е. условия, при которых потребитель каждого типа предпочтет заключение предназначенного для него контракта отказу от сделки. Эти ограничения имеют вид $U_i(P_i, Q_i) \geq \overline{U}$. Соответственно для заданной функции полезности $\theta_i \cdot \ln(1+Q_i) - P_i \geq 0$, где $i = 1, 2$.

Итак, задача максимизации прибыли монополиста π имеет вид

$$\max \pi_i = \max_{P_i, Q_i} \{P_i - c \cdot Q_i\}$$

$$\| \theta_i \cdot \ln(1+Q_i) - P_i \geq 0.$$

Запишем функцию Лагранжа

$$\mathrm{L} = P_i - c \cdot Q_i + \lambda \cdot (\theta_i \cdot \ln(1+Q_i) - P_i).$$

Дифференцируя и преобразуя условия первого порядка, получим

$$\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial P_i} = 1 - \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 1,$$

$$\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial Q_i} = -c + \lambda \cdot \frac{\theta_i}{1+Q_i} = 0 \Rightarrow \frac{\theta_i}{1+Q_i} = \frac{1}{4}.$$

Откуда для $\theta_1 = 2$: $Q_1 = 4\theta_1 - 1 = 7$; для $\theta_2 = 3$: $Q_2 = 4\theta_2 - 1 = 11$. Соответственно $P_1 = \theta_1 \ln(Q_1 + 1) = 2\ln 8 = 6\ln 2$ и $P_2 = \theta_2 \ln(Q_2 + 1) = 3\ln 12$.

Итак, монополист предложит потребителям набор контрактов вида $\langle \{6\ln 2, 7\}, \{3\ln 12, 11\} \rangle$. Эти контракты позволяют монополисту проводить совершенную ценовую дискриминацию и тем самым обеспечивают ему максимально возможную прибыль.

2) Если информация асимметрична (монополист не способен определить тип потребителя), некоторым потребителям может быть выгодно заключить с продавцом «чужой» (предназначенный для потребителей другого типа) контракт.

В нашем случае потребители, выше ценящие товар монополиста, предпочтут заключать с монополистом контракт, предназначенный для потребителей другого типа: полезность, получаемая ими от «своего» контракта, равна нулю, в то время как полезность от заключения «чужого» контракта составляет $U_2(P_1, Q_1) = \theta_2 \cdot \ln(1+Q_1) - P_1 = 3 \cdot \ln 8 - 2\ln 8 = \ln 8 > 0$.

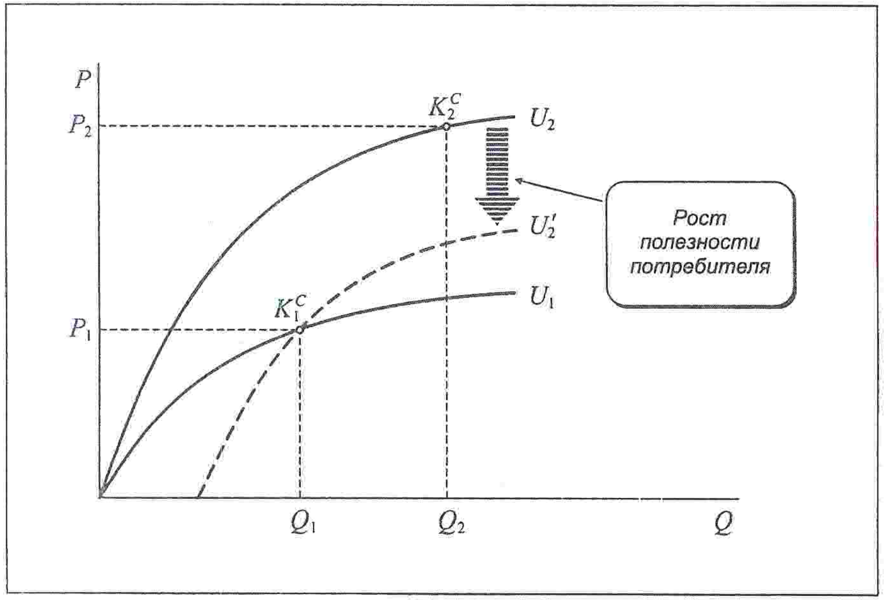

Рис. 1.8а. Искушенные потребители выбирают «чужой» контракт

Проиллюстрируем этот эффект графически (рис. 1.8а)[13].

Несложно также показать, что потребителям с низкой оценкой товара невыгодно заключать с монополистом «чужой» контракт:

$$U_1(P_2, Q_2) = \theta_1 \cdot \ln(1+Q_2) - P_2 = 2 \cdot \ln 12 - 3\ln 12 = -\ln 12 < 0,$$

что хорошо видно и на графике (рис. 1.8б).

Итак, оптимальный в случае симметричной информации набор контрактов с введением информационной асимметрии перестает быть таковым: если монополист предложит указанный набор контрактов потребителям, все они выберут контракт, предназначенный для потребителей с низкой оценкой товара. В условиях асимметрии информации совершенная дискриминация невозможна, и это отрицательно сказывается на прибылях производителя. Другими словами, предлагая этот набор контрактов потребителям, монополист не сможет отделить одну группу потребителей от другой и проводить ценовую дискриминацию, тем самым повысив свою прибыль. Здесь возникает проблема неблагоприятного отбора: с точки зрения монополиста, на рынке остаются только потребители, приносящие ему меньшую прибыль.

[13] На рис. 1.8а, 1.8б и 1.9 K_i — контракт, предлагаемый потребителю типа i. Здесь и далее по всему тексту *верхний индекс C* используется в случае *симметричной информации, верхний индекс A* — в случае *асимметричной информации.*

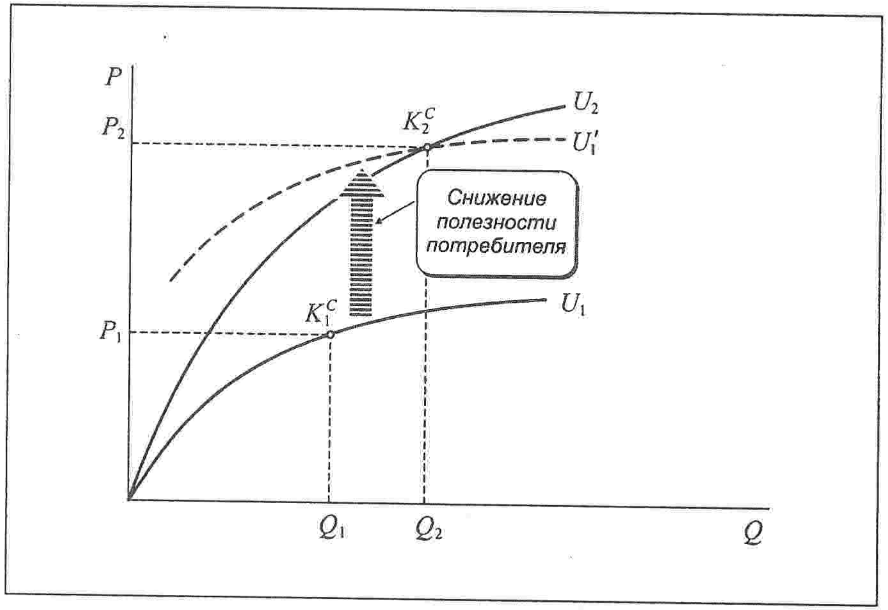

Рис. 1.8б. Нескушенные потребители выбирают «свой» контракт

Продавец-монополист должен учитывать возможность оппортунистического поведения потребителей. Поэтому он, составляя контракт, наряду с ограничениями участия, будет принимать во внимание и *ограничения совместимости по стимулам*: для потребителя типа i должно выполняться $U_i(P_i, Q_i) \geq U_i(P_j, Q_j)$, где $i \neq j$. Иначе говоря, выполнение этого ограничения предполагает, что у потребителей нет стимулов обманывать продавца, поскольку от «своего» контракта они получают не меньшую полезность, чем от «чужого». Для нашего вида функции полезности имеем

$$\theta_i \cdot \ln(Q_i + 1) - P_i \geq \theta_i \cdot \ln(Q_j + 1) - P_j \text{ для } i, j = 1, 2 \text{ и } i \neq j.$$

Набор контрактов, учитывающий не только ограничения участия, но и ограничения совместимости по стимулам для потребителей различных типов, позволит монополисту дифференцировать потребителей и проводить ценовую дискриминацию в условиях асимметрии информации.

3) Найдем оптимальный набор контрактов для случая асимметрии информации. Представим ситуацию графически (рис 1.9).

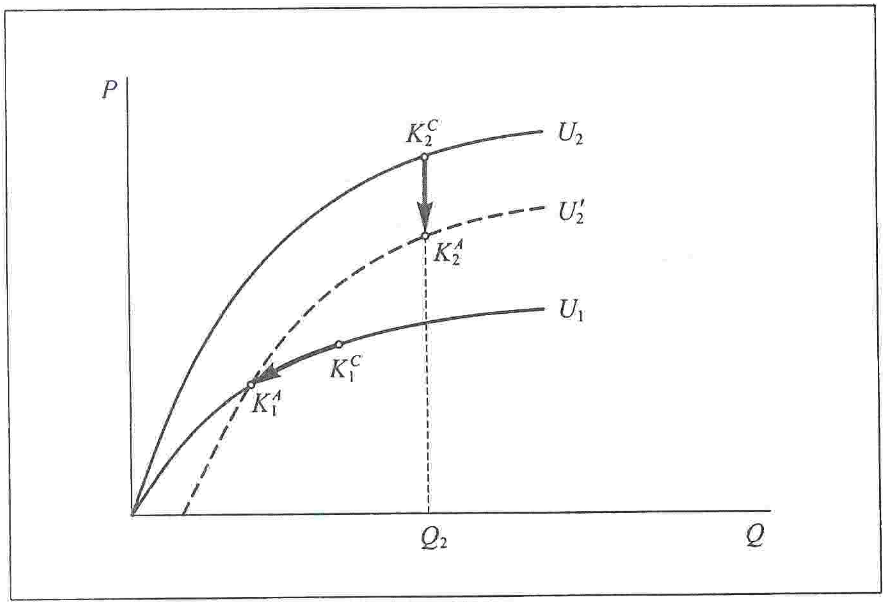

Рис. 1.9. Построение оптимального набора контрактов

Монополист фиксирует количество товара, предлагаемого потребителям второго типа, и подбирает цену так, чтобы эта группа потребителей стала безразлична к выбору того или иного контракта. С другой стороны, потребители, низко ценящие товар, не будут выдавать себя за потребителей, высоко ценящих товар, ни при каких разумных (с точки зрения монополиста) контрактах. Соответственно контракт, предлагаемый монополистом этой группе потребителей, будет лежать на кривой безразличия, которая отражает альтернативный уровень полезности потребителя. Таким образом, в оптимальной точке ограничение участия для потребителей первого типа (низко ценящих товар) и ограничение

совместимости по стимулам для потребителей второго типа (высоко ценящих товар) обращаются в равенства.

Докажем этот результат аналитически.

Покажем для начала, что ограничение участия для потребителей первого типа $\theta_1 \cdot \ln(1+Q_1) - P_1 \geq 0$ в оптимальной точке выполняется как равенство. Рассмотрим тройное неравенство

$$\theta_2 \ln(1+Q_2) - P_2 \geq \theta_2 \ln(1+Q_1) - P_1 > \theta_1 \ln(1+Q_1) - P_1 \geq \theta_1 \ln(1+Q_2) - P_2 .$$

Заметим, что это тройное неравенство включает в себя всю нашу систему ограничений, поэтому его выполнение означает, что мы находимся в допустимом множестве задачи максимизации. Первая часть неравенства должна выполняться в оптимальной точке, поскольку это есть не что иное, как одно из накладываемых на задачу оптимизации ограничений (ограничение участия для потребителей, высоко ценящих товар). Вторая часть неравенства выполняется как строгое неравенство в силу $\theta_2 > \theta_1$. Третья часть неравенства должна выполняться в оптимальной точке, поскольку это ограничение участия для потребителей, низко ценящих товар.

Для того чтобы показать, что $\theta_1 \cdot \ln(1+Q_1) - P_1 = 0$, используем доказательство от противного: пусть в точке оптимального контракта $\theta_1 \cdot \ln(1+Q_1) - P_1 > 0$[14]. Тогда систему неравенств можно переписать в виде

$$\begin{cases} \theta_2 \ln(1+Q_2) - P_2 \geq \theta_2 \ln(1+Q_1) - P_1 > \theta_1 \ln(1+Q_1) - P_1 > 0 \\ \theta_1 \ln(1+Q_1) - P_1 \geq \theta_1 \ln(1+Q_2) - P_2. \end{cases}$$

Очевидно, что всегда найдется такое достаточно малое положительное число ε, что, если $\theta_1 \cdot \ln(1+Q_1) - P_1 > 0$, то $\theta_1 \cdot \ln(1+Q_1) - P_1 - \varepsilon > 0$. Также понятно, что если вычесть ε из обеих частей любого неравенства, то знак неравенства не изменится. Поэтому верна система

$$\begin{cases} \theta_2 \ln(1+Q_2) - P_2 - \varepsilon \geq \theta_2 \ln(1+Q_1) - P_1 - \varepsilon > \theta_1 \ln(1+Q_1) - P_1 - \varepsilon > 0 \\ \theta_1 \ln(1+Q_1) - P_1 - \varepsilon \geq \theta_1 \ln(1+Q_2) - P_2 - \varepsilon. \end{cases}$$

Итак, все ограничения задачи оптимизации по-прежнему выполняются (т.е. мы по-прежнему находимся в допустимом множестве), и

[14] Отметим, что в точке оптимального контракта $\theta_1 \cdot \ln(1+Q_1) - P_1 < 0$ быть не может, поскольку это одно из ограничений.

при этом монополист может увеличить цену товара (а следовательно, и свою прибыль). Это означает, что выбранная первоначально точка не была оптимальной. Мы пришли к противоречию. Следовательно, ограничение участия для потребителей, меньше ценящих товар, выполняется как равенство $\theta_1 \cdot \ln(1+Q_1)-P_1=0$. С экономической точки зрения это означает, что потребители, низко ценящие товар, не получат от заключения контракта с монополистом никакой дополнительной полезности (как и в случае симметричной информации).

Докажем теперь, что ограничение совместимости по стимулам для потребителей, высоко ценящих товар, выполняется как равенство. Рассмотрим то же тройное неравенство

$$\theta_2 \ln(1+Q_2)-P_2 \ge \theta_2 \ln(1+Q_1)-P_1 > \theta_1 \ln(1+Q_1)-P_1 \ge \theta_1 \ln(1+Q_2)-P_2.$$

Аналогичным образом, всегда найдется такое малое положительное число ε, что $\theta_2 \ln(1+Q_2)-P_2-\varepsilon \ge \theta_2 \ln(1+Q_1)-P_1$.

Итак, все ограничения задачи оптимизации по-прежнему выполняются, и при этом монополист может увеличить цену товара (а следовательно, и свою прибыль). Это означает, что первоначально наша точка не была оптимальной. Мы пришли к противоречию. Следовательно, ограничение совместимости по стимулам для потребителей, высоко ценящих товар, выполняется как равенство

$$\theta_2 \ln(1+Q_2)-P_2=\theta_2 \ln(1+Q_1)-P_1.$$

Покажем, что ограничение участия для потребителей, высоко ценящих товар, неэффективно в точке, соответствующей оптимальному контракту, т.е. выполняется как строгое неравенство $\theta_2 \ln(1+Q_2)-P_2>0$. Выше мы показали, что в точке оптимального контракта выполнено тройное равенство

$$\theta_2 \ln(1+Q_2)-P_2 \ge \theta_2 \ln(1+Q_1)-P_1 > \theta_1 \ln(1+Q_1)-P_1=0.$$

Следовательно, $\theta_2 \ln(1+Q_2)-P_2>0$.

Итак, для потребителей с высокой оценкой товара полезность от контракта выше альтернативного уровня, т.е. этот тип потребителей получает информационную ренту. Полезности, получаемые потребителями второго типа от «своего» и «чужого» контрактов, равны. Неэффективность данного ограничения не противоречит экономической логике: если даже низко ценящие товар потребители привлечены предлагаемым контрактом, то потребители с высокой оценкой товара точно предпочтут заключить контракт с монополистом.

Покажем, что в оптимальной точке ограничение совместимости по стимулам для потребителей, низко ценящих товар, выполняется как строгое неравенство

$$\theta_1 \ln(1+Q_1)-P_1 > \theta_1 \ln(1+Q_2)-P_2.$$

Поскольку $\theta_1 \ln(1+Q_1)-P_1=0$, то мы, по сути, доказываем неравенство $\theta_1 \ln(1+Q_2)-P_2<0$. Из доказанного выше получаем $P_1=\theta_1 \ln(1+Q_1)$ и $P_2=\theta_2\left[\ln(1+Q_2)-\ln(1+Q_1)\right]+\theta_1 \ln(1+Q_1)$. Подставляя эти выражения в рассматриваемое неравенство, имеем

$$\theta_2\left[\ln(1+Q_2)-\ln(1+Q_1)\right]+\theta_1 \ln(1+Q_1)-\theta_1 \ln(1+Q_2)>0$$

или, перегруппировав члены,

$$\theta_2\left[\ln(1+Q_2)-\ln(1+Q_1)\right]>\theta_1\left[\ln(1+Q_2)-\ln(1+Q_1)\right],$$

что верно в наших предпосылках в силу $\theta_2>\theta_1$. Поскольку $Q_1 \ge 0$, $Q_2 \ge 0$ и $Q_2>Q_1$, то $\ln(1+Q_2)-\ln(1+Q_1)>0$, и при сокращении на этот множитель знак неравенства не изменится. Таким образом, как и в симметричном случае, падение цены за единицу товара, достаточное, чтобы привлечь к покупке большего количества товара покупателей второго типа, слишком мало, чтобы привлечь к этому контракту покупателей первого типа.

Монополист, который не знает, к какому типу потребителя относится конкретный потребитель, максимизирует ожидаемую прибыль π от сделки с этим потребителем, учитывая записанные выше условия участия и стимулирования. Задача условной оптимизации, решаемая монополистом, имеет вид

$$\max E\pi = \max_{P_1,P_2,Q_1,Q_2}\left\{\frac{1}{2}\left(P_1-c\cdot Q_1\right)+\frac{1}{2}\left(P_2-c\cdot Q_2\right)\right\}$$

$$\left\|\begin{aligned}
&\theta_1 \ln(1+Q_1)-P_1 \ge 0\\
&\theta_2 \ln(1+Q_2)-P_2 \ge 0\\
&\theta_1 \ln(1+Q_1)-P_1 \ge \theta_1 \ln(1+Q_2)-P_2\\
&\theta_2 \ln(1+Q_2)-P_2 \ge \theta_2 \ln(1+Q_1)-P_1.
\end{aligned}\right.$$

Так как ограничение участия для потребителей первого типа выполняется как равенство, т.е. $\theta_1 \ln(1+Q_1) - P_1 = 0$, то $P_1 = \theta_1 \ln(1+Q_1)$. Поскольку ограничение совместимости по стимулам для потребителей второго типа выполняется как равенство, т.е. $\theta_2 \ln(1+Q_2) - P_2 = \theta_2 \ln(1+Q_1) - P_1$, то, подставляя выражение для P_1, получаем

$$P_2 = \theta_2[\ln(1+Q_2) - \ln(1+Q_1)] + \theta_1 \ln(1+Q_1).$$

Вместе с тем, как мы показали выше, ограничение совместимости по стимулам для потребителей первого типа и ограничение участия для потребителей второго типа в точке оптимального контракта неэффективны, поэтому их можно не включать в оптимизационную задачу. Следовательно, задачу максимизации прибыли для монополиста можно переписать как

$$\max E\pi = \max_{P_1, P_2, Q_1, Q_2} \left\{ \frac{1}{2}(P_1 - c \cdot Q_1) + \frac{1}{2}(P_2 - c \cdot Q_2) \right\}$$

$$\left\| \begin{array}{l} P_1 = \theta_1 \ln(1+Q_1) \\ P_2 = \theta_1 \ln(1+Q_1) - \theta_2 \ln(1+Q_1) + \theta_2 \ln(1+Q_2), \end{array} \right.$$

или, подставляя ограничения в максимизируемую функцию,

$$\max E\pi = \max_{Q_1, Q_2} \left\{ \frac{1}{2}(\theta_1 \ln(1+Q_1) - cQ_1 + \theta_1 \ln(1+Q_1) - \theta_2 \ln(1+Q_1) + \theta_2 \ln(1+Q_2) - cQ_2) \right\}.$$

Условия первого порядка имеют вид

$$\frac{\partial E\pi}{\partial Q_1} = \frac{\theta_1}{1+Q_1} - c - \frac{\theta_2}{1+Q_1} + \frac{\theta_1}{1+Q_1} = 0,$$

откуда путем несложных преобразований получим $2\theta_1 - c \cdot (1+Q_1) - \theta_2 = 0$. Подставляя θ_1 и θ_2, получим

$$2 \cdot 2 - c \cdot (Q_1 + 1) - 3 = 0 \;\Rightarrow\; \frac{1}{4}(Q_1 + 1) = 1 \Rightarrow Q_1 = 3 \Rightarrow P_1 = 4\ln 2.$$

Аналогично:

$$\frac{\partial E\pi}{\partial Q_2} = \frac{\theta_2}{1+Q_2} - c = 0 \;\Rightarrow\; \frac{\theta_2}{1+Q_2} = c \;\Rightarrow\; Q_2 = 11 \;\Rightarrow\; P_2 = 3\ln 12 - 2\ln 2.$$

Характерной чертой наборов контрактов в случае симметричной и асимметричной информации является постоянство количества товара, приобретаемого потребителями с высокой оценкой товара: в нашем примере $Q_2^C = Q_2^A = 11$. Цены P_1, P_2 и количество товара Q_1, приобретаемого потребителями с низкой оценкой, в случае асимметрии информации уменьшаются, что приводит к снижению прибыли монополиста.

Действительно, если информация симметрична, монополист получает прибыль в размере $\pi_1 = 6\ln 2 - \frac{7}{4}$, заключая контракт с потребителем первого типа, и $\pi_2 = 3\ln 12 - \frac{11}{4}$, заключая контракт с потребителем второго типа. Ожидаемая прибыль монополиста при этом составляет

$$E\pi = 0{,}5 \cdot \pi_1 + 0{,}5 \cdot \pi_2 = 3\ln\left(4\sqrt{3}\right) - 2{,}25 \approx 3{,}56.$$

Если информация асимметрична, то прибыли монополиста от контрактов с потребителями различных типов составляют соответственно $\pi_1 = 4\ln 2 - \frac{3}{4}$ и $\pi_2 = 3\ln 12 - 2\ln 2 - \frac{11}{4}$, а ожидаемая прибыль:

$$E\pi = 0{,}5 \cdot \pi_1 + 0{,}5 \cdot \pi_2 = 0{,}5\ln 6912 - 2{,}25 \approx 2{,}17.$$

Итак, прибыль продавца уменьшилась, поскольку в случае асимметрии информации совершенная ценовая дискриминация невозможна.

1.5. ЗАДАЧИ

Задача 1.1

Разработка оптимального контракта

Бизнесмен Василий набирает девушек для нового филиала своего модельного агентства. Все девушки совершенно одинаковы (блондинки, стройные, голубоглазые и т.п.), за исключением маленькой детали — лишь небольшая часть $(\varphi = 0{,}25)$ девушек способна долгое время ходить на шпильках, остальные быстро устают.

собственника (акционера). Они заключают контракт, согласно которому менеджер должен распоряжаться акциями собственника. Акционер плохо осведомлен о том, как это делается, и, кроме того, ему очень сложно проверить, что именно делает менеджер. Такая ситуация способствует целому ряду проявлений морального риска.

Моральный риск на рынке кредитов[8]

После заключения контракта у заемщика возникают стимулы совершать более рисковые действия по сравнению с теми, которые он собирался предпринять ранее, дабы иметь возможность вернуть сумму, взятую на определенных условиях при некой фиксированной процентной ставке. Если он в большей степени, нежели банкир, приемлет риск, то ему имеет смысл увеличить риск своих операций таким образом, чтобы максимизировать ожидаемую доходность. Даже если ситуация сложится неблагоприятно, для него потери будут не столь ощутимы, сколь для банкира.

С моральным риском на рынке кредитов связана еще одна проблема — проблема *мягкого бюджетного ограничения*[9]. Представим себе ситуацию, когда предприятие берет кредит в банке на определенный срок, а по его истечении сообщает, что вернуть кредит в настоящий момент не может, зато, если дать ему дополнительный кредит и подождать еще некоторое время, оба кредита окупятся с лихвой. Если это сообщение соответствует действительности, банку выгоднее осуществить дополнительное финансирование. В противном случае он вообще ничего не получит. Менеджеры ход рассуждений кредиторов понимают и поэтому чувствуют себя достаточно свободно: финансовая дисциплина, связанная с необходимостью платить долги, ослабевает. Подобная ситуация типична при реализации долгосрочных проектов, которые требуют нескольких этапов финансирования.

[8] См. задачу 2.33.

[9] Термин введен Я. Корнаи применительно к плановой экономике.

2.4. ПРИМЕР РЕШЕНИЯ ТИПОВОЙ ЗАДАЧИ

Дано:

Рассматриваются взаимоотношения нанимателя и наемного работника. Функция полезности работника имеет вид $U(w,e)=\sqrt{w}-e$, где w — заработная плата, e — усилия, прилагаемые работником. Альтернативный уровень полезности работника $\overline{U}=2$. Наниматель максимизирует ожидаемую прибыль. Связь дохода нанимателя (R) и уровня усилий работника (e) описывается следующей матрицей вероятностей.

Уровень усилий	Доход	
	$R=10$	$R=70$
$e=0$	0,75	0,25
$e=2$	0,25	0,75

Задание:

1) Изобразите (схематично) в осях w — U графики функций полезности работника и нанимателя. Каково их отношение к риску? Ответ поясните.

2) Изобразите дерево игры.

3) Какой контракт предложит наниматель в случае, когда усилия работника наблюдаемы? Какую полезность получит работник, следуя условиям этого контракта? Каковы ожидаемая прибыль нанимателя и ожидаемая зарплата работника при данном контракте? Что можно сказать о распределении риска в данном контракте?

4) Как будет выглядеть стимулирующий контракт, который максимизирует полезность нанимателя, если усилия работника не наблюдаемы? Посчитайте ожидаемую прибыль нанимателя и ожидаемую зарплату работника для такого контракта. Сравните эти значения с полученными в предыдущем случае. Как они соотносятся и почему? Будет ли данный контракт эффективен с точки зрения распределения риска?

Решение:

1) Для начала проанализируем характеристики экономических агентов — нанимателя (принципала) и наемного работника (агента).

Наемный работник (агент)

Для функции полезности агента $U(w,e)=\sqrt{w}-e$ выполняется

$$\frac{\partial U}{\partial e}=-1<0.$$

С увеличением прилагаемых усилий его полезность падает. Чтобы стимулировать агента работать больше, принципалу необходимо предложить ему более выгодные условия, компенсируя тем самым падение полезности от более усердного труда. Отметим также, что зависимость полезности агента от уровня прилагаемых им усилий такова, что издержки приложения усилий положительны для любых $e>0$.

Поскольку функция полезности зависит только от двух величин — уровня усилий и заработной платы, резонно предположить, что под «более выгодными условиями контракта» понимается более высокая оплата труда агента. Действительно,

$$\frac{\partial U}{\partial w}=\frac{1}{2\sqrt{w}}>0;\quad \frac{\partial^2 U}{\partial w^2}=-\frac{1}{4w\sqrt{w}}<0.$$

С увеличением заработной платы полезность агента растет, но темпы прироста полезности с ростом заработной платы падают. Такой вид зависимости функции полезности от заработной платы свидетельствует о том, что агент отрицательно относится к риску (risk-averse agent).

Проиллюстрируем отношение агента к риску на графике (рис. 2.3).

Функция полезности агента в зависимости от w имеет вид $U=U(w)$, причем $\frac{\partial U}{\partial w}>0$, $\frac{\partial^2 U}{\partial w^2}<0$. Пусть он получает заработную плату w_1 с вероятностью p и заработную плату w_2 с вероятностью $(1-p)$. Тогда его ожидаемая заработная плата составит $Ew=p\cdot w_1+(1-p)\cdot w_2$, а его ожидаемая полезность — $EU(w)=p\cdot U(w_1)+(1-p)\cdot U(w_2)$. Чтобы найти $EU(w)$ графически, мы проводим хорду между точками A и B и строим точку C, проекция которой на ось w есть Ew, а на ось U — $EU(w)$.

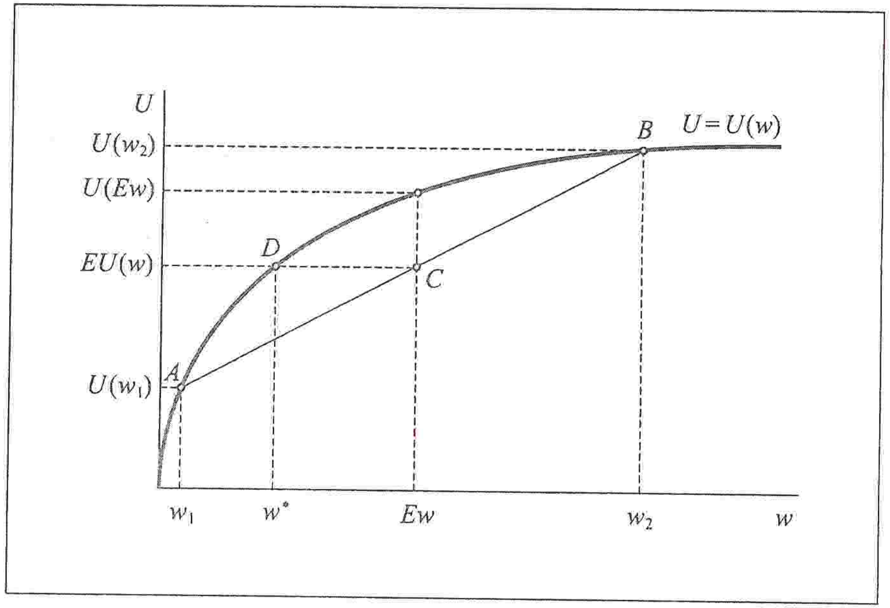

Рис. 2.3. Премия за риск

Поскольку функция полезности выпукла вверх, то ожидаемая полезность агента ниже, чем полезность, которую он получил бы, если бы его заработная плата составляла фиксированную величину, равную ожидаемой заработной плате: $EU(w)<U(Ew)$.

Более того, агент готов пожертвовать частью заработной платы, чтобы не брать на себя риск, связанный с ее неопределенностью: действительно, если предложить агенту выбор между контрактом с неопределенной заработной платой (w_1 и w_2) и контрактом с фиксированной заработной платой w, лежащей в пределах от w^* до Ew, то он предпочтет второй контракт — контракт с более низкой ожидаемой заработной платой. Величина w^* — уровень заработной платы, дающий агенту полезность в размере $U^*=EU(w)$; w^* есть проекция на ось w точки D, которая, в свою очередь, получена проецированием уровня полезности $EU(w)$ на кривую полезности.

Величина $(Ew-w^*)$ представляет собой так называемую *премию за риск* — сумму, которой агент готов пожертвовать, чтобы его избавили от необходимости нести бремя риска (неопределенности заработной платы).

Наниматель (принципал)

Экономически максимизация принципалом собственной прибыли означает, что он нейтрален к риску, его интересует лишь ожидаемая величина денежного дохода. Графически функция полезности принципала в осях w — U представляет собой прямую линию.

2) Изобразим дерево игры (см. рис. 2.4).

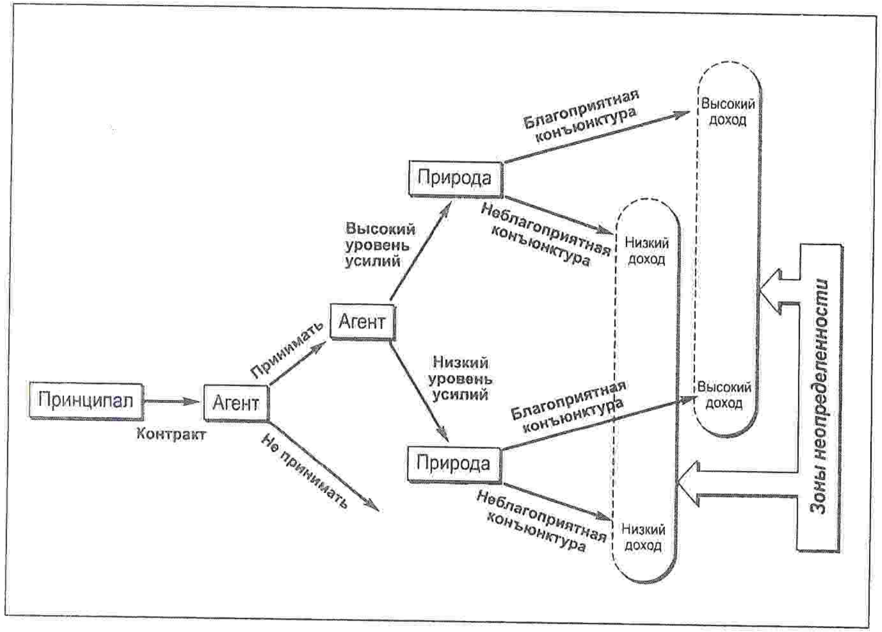

Рис. 2.4. Возникновение морального риска

3) Проанализируем ситуацию, когда усилия агента наблюдаемы (информация симметрична).

Пусть принципал осведомлен о том, насколько хорошо работает агент. В этой ситуации он может добиться требуемого уровня усилий, предложив агенту контракт, который фиксирует его заработную плату на том или ином уровне в зависимости от прилагаемых им усилий. Определим, что выгоднее для принципала в данном случае.

В нашем примере возможны два уровня усилий: $e=0$ и $e=2$. Кроме того, у агента имеются альтернативные возможности трудоустройства. Поэтому он согласится работать на данного принципала, только если предложение последнего будет по крайней мере не хуже, чем любой другой вариант трудоустройства. В нашем примере ожидаемое значение полезности наиболее выгодного альтернативного варианта составляет 2.

Чтобы стимулировать агента трудиться усердно (т.е. с $e=2$), принципал предложит ему контракт вида

$$w=\begin{cases} X, & \text{если } e=2 \\ m, & \text{если } e=0, \end{cases}$$

где параметр m может принимать любые значения из некоторого интервала[10].

При данном контракте заработок агента полностью определяется его усилиями. Риск, связанный с дисперсией дохода, полностью берет на себя нейтральный к риску принципал. И подобное распределение риска является эффективным. Любое изменение уровня заработков агента повлекло бы за собой необходимость компенсировать ему этот риск, в то время как принципал к такому риску индифферентен.

Рассчитаем равновесную заработную плату X. Как уже говорилось, агент согласится заключить с принципалом контракт лишь в том случае, если предложение принципала будет по крайней мере не хуже, чем лучший из альтернативных вариантов. Следовательно агент согласится заключить контракт, если $U(w,e)\geq\overline{U}$, т.е. $\sqrt{X}-2\geq 2$, откуда $X\geq 16$. До тех пор, пока заработок агента не опускается ниже 16, он не станет менять место работы[11].

Принципал максимизирует прибыль. Следовательно, ему выгодно, чтобы издержки были минимальны. Поэтому он предложит агенту минимальный уровень заработной платы, на который тот согласится. Итак, стимулирующий контракт примет вид

---

[10] Величина m должна быть такой, чтобы работнику было выгоднее прикладывать усилия $e=2$ и получать заработную плату X, чем прикладывать усилия $e=0$ и получать зарплату m.

[11] Мы предполагаем, что работник — не «вредный» экономический агент, т.е. что он предпочтет остаться на прежнем месте, если ему все равно, работать ли на данного нанимателя или уйти к другому (такая предпосылка сильно упрощает расчеты).

$$w = \begin{cases} 16, & если\ e = 2 \\ m, & если\ e = 0. \end{cases}$$

Пусть для определенности $m = 0$, т.е. контракт будет иметь вид

$$w = \begin{cases} 16, & если\ e = 2 \\ 0, & если\ e = 0. \end{cases}$$

При этом ожидаемый доход принципала составит $ER = 0{,}25 \cdot 10 + 0{,}75 \cdot 70 = 55$; ожидаемый чистый доход (прибыль) принципала будет равен $ER_{NET} = 55 - 16 = 39$; полезность агента составит $U = \sqrt{16} - 2 = 2$. Полезность агента при данном контракте равна альтернативному уровню полезности (это напрямую следует из решенного нами уравнения).

Мы нашли уровень заработной платы, при котором агент согласится на предлагаемый принципалом контракт. Но разрабатывая контракт, мы предполагали, что принципалу выгоден высокий уровень усилий агента, а это вовсе не очевидно: хотя бóльшие усилия агента приносят принципалу больший доход, они требуют более высокой оплаты, поэтому прибыль принципала может даже упасть.

Рассмотрим случай, когда принципал стимулирует агента прикладывать лишь минимальный уровень усилий ($e = 0$). В этом случае он предложит ему контракт вида

$$w = \begin{cases} \xi, & если\ e = 2 \\ Y, & если\ e = 0, \end{cases}$$

где параметр ξ может принимать любые значения из некоторого интервала[12]. Условие заключения агентом контракта имеет вид $\sqrt{Y} - 0 \geq 2$. Отсюда, согласно той же логике, оптимальный контракт приобретает вид

$$w = \begin{cases} \xi, & если\ e = 2 \\ 4, & если\ e = 0. \end{cases}$$

Не нарушая общности, примем $\xi = 4$: как бы агент ни работал, он все равно получит заработную плату, равную 4; поскольку агент

[12] Величина ξ должна быть такой, чтобы работнику было выгоднее прикладывать усилия $e = 0$ и получать заработную плату Y, чем прикладывать усилия $e = 2$ и получать зарплату ξ.

максимизирует собственную полезность, он не будет прикладывать усилия $e = 2$, ибо это приведет к снижению его полезности. При этом ожидаемый доход принципала составит $ER = 0{,}75 \cdot 10 + 0{,}25 \cdot 70 = 25$; ожидаемый чистый доход принципала будет равен $ER_{NET} = 25 - 4 = 21$; полезность агента составит $U = \sqrt{4} - 0 = 2$.

Таким образом, издержки оплаты принципалом дополнительных усилий составляют $16 - 4 = 12$. В то же время эти дополнительные усилия обеспечивают увеличение ожидаемых поступлений на $55 - 25 = 30 > 12$. Следовательно, принципалу выгодно, чтобы агент трудился усердно.

Отметим также, что в случае наблюдаемости усилий ожидаемая заработная плата агента совпадает с прописанной в контракте, поскольку уровень его усилий полностью определяет его доход. Итак, при наблюдаемости e эффективный контракт избавляет работника от бремени неконтролируемого риска.

4) Теперь проанализируем ситуацию, когда усилия агента не наблюдаемы (информация асимметрична).

Пусть принципал не может оценить уровень усилий работника напрямую. В этой ситуации при составлении контракта он ориентируется на доступную ему информацию и устанавливает агенту заработную плату в зависимости от собственного дохода[13]. Принципал может стимулировать агента прикладывать те или иные усилия, предлагая ему контракт определенного вида.

Если принципал хочет стимулировать высокий уровень усилий агента, он предлагает тому контракт вида

$$w = \begin{cases} y, & если\ R = 70 \\ x, & если\ R = 10. \end{cases}$$

Прямой связи между прилагаемыми агентом усилиями и его заработной платой нет. Эта связь лишь косвенна: чем лучше агент трудится, тем выше вероятность получения принципалом высокого дохода и, следовательно, выше вероятность получения агентом высокой заработной платы.

[13] Однако доход принципала не полностью определяется усилиями агента, хотя и зависит от них. Неблагоприятный исход дел может объясняться не леностью агента, а неудачным стечением обстоятельств, благоприятный же исход может быть следствием удачного стечения обстоятельств, вне зависимости от действий агента.

Чтобы агент согласился принять контракт, его ожидаемая полезность при усердном труде не должна быть ниже альтернативной полезности, т.е. должно выполняться *ограничение участия* $EU_{e=2} \geq \overline{U}$. Если контракт не будет предполагать выполнения этого ограничения, агент просто откажется в нем участвовать.

В то же время принципал хочет, чтобы агент работал усердно. Следовательно, ожидаемая полезность агента при усердном труде должна быть выше, чем при минимальном уровне усилий, т.е. должно выполняться *ограничение совместимости по стимулам* $EU_{e=2} \geq EU_{e=0}$. Работник должен иметь стимулы трудиться усердно.

Итак, должна выполняться система неравенств

$$\begin{cases} EU_{e=2} \geq \overline{U} & \text{(ограничение участия)} \\ EU_{e=2} \geq EU_{e=0} & \text{(ограничение совместимости по стимулам).} \end{cases}$$

Ожидаемая полезность агента при усердном труде составит $EU_{e=2} = 0{,}25 \cdot (\sqrt{x} - 2) + 0{,}75 \cdot (\sqrt{y} - 2)$. При минимальном уровне усилий агент получит ожидаемую полезность, равную $EU_{e=0} = 0{,}75 \cdot (\sqrt{x} - 0) + 0{,}25 \cdot (\sqrt{y} - 0)$.

Следовательно, ограничение совместимости по стимулам имеет вид

$$0{,}25 \cdot (\sqrt{x} - 2) + 0{,}75 \cdot (\sqrt{y} - 2) \geq 0{,}75 \cdot \sqrt{x} + 0{,}25 \cdot \sqrt{y}$$

или $\sqrt{y} \geq 4 + \sqrt{x}$. (2-1)

Ограничение участия, в свою очередь, будет выглядеть, как

$$0{,}25 \cdot (\sqrt{x} - 2) + 0{,}75 \cdot (\sqrt{y} - 2) \geq 2$$

или $\sqrt{y} \geq \frac{16}{3} - \frac{1}{3}\sqrt{x}$. (2-2)

Система неравенств (2-1) и (2-2) описывают множество контрактов, которые, с одной стороны, приемлемы для агента, а с другой — стимулируют его трудиться усердно (см. рис. 2.5).

Проблема, стоящая перед принципалом, заключается в том, чтобы найти значения x и y, удовлетворяющие требованиям этих ограничений и одновременно обеспечивающие получение максимального чистого дохода за вычетом заработка агента. Кроме того, эти значения x и y должны быть положительными: нельзя заставлять агента (в данном примере) выплачивать принципалу что-либо в случае неблагоприятного конечного результата.

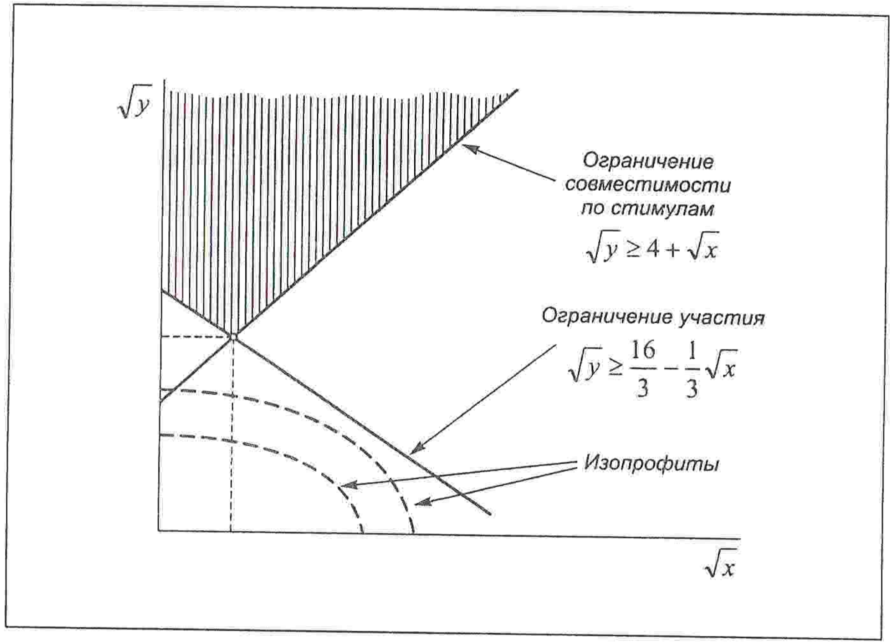

Рис. 2.5. Допустимое множество стимулирующих контрактов

Найдем наиболее выгодный для принципала стимулирующий контракт из этого множества, т.е. контракт, принадлежащий множеству, с одной стороны, и максимизирующий ожидаемый чистый доход принципала (минимизирующий его расходы на заработную плату агента), с другой.

При $e = 2$ ожидаемый чистый доход принципала составляет

$$ER_{NET} = 0{,}25 \cdot (10 - x) + 0{,}75 \cdot (70 - y) = 55 - 0{,}25x - 0{,}75y.$$

Пусть $\sqrt{y} = b$, а $\sqrt{x} = a$. Тогда оптимальный контракт является решением оптимизационной задачи вида

$$\max_{a,\,b}(55 - 0{,}25a^2 - 0{,}75b^2)$$

$$\left| \begin{array}{l} b \geq \frac{16}{3} - \frac{1}{3}a \\ b \geq 4 + a, \end{array} \right.$$

или, что то же самое,

$$\min_{a,\,b}(0{,}25a^2 + 0{,}75b^2)$$

$$\left|\begin{array}{l} b \geq \frac{16}{3} - \frac{1}{3}a \\ b \geq 4 + a. \end{array}\right.$$

Минимизируемая нами функция графически представляет собой эллипс, вытянутый вдоль оси $\sqrt{x}$ с центром в точке (0, 0). Очевидно, что оптимумом этой функции на заданном множестве будет либо точка касания линии уровня данного эллипса с прямой $\sqrt{y} \geq \frac{16}{3} - \frac{1}{3}\sqrt{x}$ (касание с прямой $\sqrt{y} \geq 4 + \sqrt{x}$ в области действительных чисел ($\sqrt{x}$, $\sqrt{y} \geq 0$) невозможно по построению); либо точка углового экстремума, определяемая, как точка пересечения ограничений (2-1) и (2-2).

В нашем примере ограничение участия и ограничение совместимости по стимулам пересекаются в точке $b = 5$; $a = 1$. Действительно, решая систему

$$\begin{cases} \sqrt{y} = \frac{16}{3} - \frac{1}{3}\sqrt{x} \\ \sqrt{y} = 4 + \sqrt{x}, \end{cases}$$

или, в наших обозначениях, систему

$$\begin{cases} b = \frac{16}{3} - \frac{1}{3}a \\ b = 4 + a, \end{cases}$$

получим

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = 5. \end{cases}$$

Задача условной оптимизации принимает вид

$$\min_{a,\,b}(0{,}25a^2 + 0{,}75b^2)$$

$$\left\|\, b = \frac{16}{3} - \frac{1}{3}a. \right.$$

Решим ее методом Лагранжа.

Лагранжиан: $L = 0{,}25a^2 + 0{,}75b^2 + \lambda(b - \frac{16}{3} + \frac{1}{3}a)$.

Условия первого порядка:

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial a} = 0{,}5a + \frac{1}{3}\lambda \\ \frac{\partial L}{\partial b} = 1{,}5b + \lambda \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = b - \frac{16}{3} + \frac{1}{3}a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = 4. \end{cases}$$

Таким образом, точка касания лежит вне области оптимальных контрактов, и оптимальный стимулирующий контракт имеет вид

$$w = \begin{cases} 25, \text{ если } R = 70 \\ 1, \quad \text{если } R = 10. \end{cases}$$

При этом ожидаемая заработная плата агента составит $Ew = 0{,}25 \cdot 1 + 0{,}75 \cdot 25 = 19$; ожидаемый доход принципала будет равен $ER = 0{,}25 \cdot 10 + 0{,}75 \cdot 70 = 55$; ожидаемый чистый доход принципала будет равен $ER_{NET} = 55 - 19 = 36$; ожидаемая полезность агента составит $EU = 0{,}75 \cdot (\sqrt{25} - 2) + 0{,}25 \cdot (\sqrt{1} - 2) = 2$.

Разрабатывая стимулирующий контракт, мы предполагали, что принципалу выгоден высокий уровень усилий работника. Тем не менее, как и в случае наблюдаемости усилий агента, эта предпосылка может и не выполняться: чтобы принципалу была выгодна усердная работа агента, ожидаемая прибыль при усилиях агента $e = 2$ должна быть выше, чем ожидаемая прибыль при минимальном уровне его усилий. Проверим, выполняется ли это условие в данном примере. Для этого рассчитаем прибыль принципала при минимальном уровне усилий агента.

Если принципалу необходим лишь минимальный уровень усилий агента, случай ненаблюдаемости усилий совпадет со случаем наблюдаемости усилий: принципал не хочет стимулировать агента к усердному труду, он разрабатывает контракт так, чтобы агент не ушел от него, оставляя уровень усилий на усмотрение последнего. Агент же, как индивид рациональный, минимизирует свои усилия и работает с $e = 0$.

Итак, если усилия агента ненаблюдаемы, и принципал хочет добиться приложения агентом минимального уровня усилий, контракт будет иметь вид

$$w = \begin{cases} \xi, & \text{если } R = 70 \\ 4, & \text{если } R = 10, \end{cases}$$

или, как мы предположили, $w = 4$.

Ожидаемый доход принципала составит $ER = 0{,}25 \cdot 70 + 0{,}75 \cdot 10 = 25$; ожидаемый чистый доход принципала будет равен $ER_{NET} = 25 - 4 = 21$; полезность агента составит $EU = 0{,}25 \cdot (\sqrt{25} - 0) + 0{,}75 \cdot (\sqrt{1} - 0) = 2$.

Чистый доход принципала выше в случае усердного труда агента $(36 > 21)$, поэтому заключение стимулирующего контракта целесообразно.

Полезность агента не возрастает по сравнению со случаем, когда усилия поддаются наблюдению, в то же время ожидаемая прибыль принципала (ожидаемый чистый доход) уменьшается с 39 до 36, поскольку ожидаемая заработная плата агента увеличилась с 16 до 19.

Заработная плата агента не полностью определяется его уровнем усилий, она зависит и от внешних, неконтролируемых агентом факторов. Риск неопределенности заработной платы ложится на неприемлющего риск агента. Таким образом, уровень эффективности снижается, издержки невозможности наблюдения уровня усилий агента равны $19 - 16 = 3$.

Рост ожидаемой заработной платы агента связан с необходимостью компенсировать ему риск неопределенности заработка. Как уже говорилось, полезность, получаемая агентом от фиксированной заработной платы, выше, чем полезность от переменной заработной платы с равным математическим ожиданием, поскольку агент отрицательно расположен к риску. Соответственно, чтобы агент получал от переменной заработной платы такую же полезность, как от фиксированной, ожидаемая заработная плата при переменной оплате должна быть выше, чем фиксированная ставка. Это превышение ожидаемой заработной платы над фиксированной ставкой, призванное компенсировать агенту снижение полезности из-за внесения в его заработок неопределенности, носит название *премии за риск*. Величина премии за риск представляет собой величину снижения дохода принципала в случае ненаблюдаемости

усилий. В нашем примере она составляет $39 - 36 = 3$. Премию за риск можно также рассчитывать, как превышение ожидаемой заработной платы Ew стимулирующего контракта в случае ненаблюдаемости усилий над величиной оплаты труда агента, стимулирующей приложение им высокого уровня усилий.

Представленная задача ярко демонстрирует феномен, в литературе получивший название *дилемма «риск — стимулы»*. С одной стороны, стимулирование общественно оптимального (максимизирующего совокупное общественное благосостояние) уровня усилий агента ведет к неэффективному распределению риска и, как следствие, к потере эффективности (к снижению благосостояния общества). С другой стороны, попытка обеспечить эффективное распределение риска приводит к потерям общественного благосостояния из-за неэффективного стимулирования. Таким образом, вопрос об эффективности стимулирования должен рассматриваться с точки зрения минимизации потерь общества от того или иного решения.

В нашем примере стимулирование высокого уровня усилий агента привело к потерям общественного благосостояния в размере 3, причем совокупное благосостояние агентов составило $W = EU + ER_{NET} = 2 + 36 = 2 + 36 = 38$. При обеспечении эффективного распределения риска совокупное благосостояние экономических агентов составило $W = EU + ER_{NET} = 2 + 21 = 23$.

Итак, стимулирование высокого уровня усилий агента приводит к меньшим потерям общественного благосостояния, чем обеспечение эффективного распределения риска.

2.5. ЗАДАЧИ

Задача 2.1

Наилучшее решение проблемы «принципал — агент»

Предположим, функция полезности агента имеет вид $U(w,e) = \sqrt{w} - e$, где w — заработная плата, e — прикладываемые усилия, причем e может принимать значения 0 и 1. Резервационный (альтернативный)